نقول عن فضاء تبولوجي X أنه T_0 - فضاء إذا كان من أجل أي نقطتين مختلفتين x و y توجد لإحداهما جوار لا يحوي النقطة الأخرى

نقول عن الفضاء التبولوجي X أنه T_1 - فضاء إذا كان من أجل أي نقطتين مختلفتين x و y توجد جوار لـ x لا يحوي y وجوار لـ y لا يحوي x ويمكن القول بأن كل مجموعة وحيدة العنصر تكون مغلقة

نقول عن فضاء تبولوجي X أنه T_2 - فضاء (أو فضاء هاوسدورف) إذا كان من أجل أي نقطتين مختلفتين x و y فإنه توجد جوار U لـ x وجوار V لـ y بحيث يكون تقاطعهما خالي

موضوعات الفصل في الزمر التبولوجية

مبرهنة:

في أي زمرة تبولوجية G القضايا التالية متكافئة

1) G هي T_0 - فضاء
2) G هي T_1 - فضاء
3) G هي T_2 - فضاء
4) $\bigcap U = \{e\}$ حيث $\{U\}$ هي جملة أساسية لجوارات العنصر e

البرهان:

$1 \Leftarrow 2$ لتكن $x, y \in G$ بحيث أن $x \neq y$ حسب الفرض (1) متوجد مثلاً جوار مفتوحة P للنقطة x لا تحوي y. وبما أن $V = x^{-1}P$ هي جوار للعنصر e فإذا أخذنا $Q = V \cap V^{-1}$ هي جوار مفتوحة متناظرة للعنصر e فإن yQ جوار مفتوحة للعنصر y أن $x \notin yQ$ لأنه لو كان غير ذلك لكان $x \in yQ$

$\Leftarrow x^{-1} \in Qy^{-1} \subseteq Vy^{-1} = x^{-1}Py^{-1} \Rightarrow e \in xx^{-1}Py^{-1} = Py^{-1}$

$\Leftarrow y \in P$ وهذا خلاف للفرض)

أي أنه أوجدنا جوار مفتوحة P للنقطة x لا تحوي y، وجوار yQ للنقطة y لا تحوي x أي أن G T_1 - فضاء

$2 \Leftarrow 3$: لتكن $x, y \in G$ حيث $x \neq y$ من الفرض (2) ينتج أن $\{x\}$ مجموعة مغلقة ومنه $P = G - \{x\}$ تكون جوار مفتوحة للنقطة y ومنه Py^{-1} جوار

مفتوحة للعنصر الحيادي e وبالتالي توجد جوار مفتوحة V للعنصر e بحيث يكون $VV^{-1} \subseteq y^{-1}P$ (تحويل استمرار g في النقطة (e,e)) عندئذ yV تكون جوار مفتوحة للنقطة y وإن $Q = G - \overline{yV}$ مجموعة مفتوحة بحيث أن $x \in Q$ (لأنه لو أن فرضنا العكس لكان $x \notin Q \Rightarrow x \in \overline{yV} \Rightarrow xV \cap yV \neq \phi$

$\Rightarrow$ $v_1 \in V$, $v_2 \in V$ بحيث يكون $xv_1 = yv_2 \Rightarrow$

$x \in y v_2 v_1^{-1} \in yVV^{-1} \Rightarrow x \in yVV^{-1} \subseteq yy^{-1}P = P$

وهذا تناقض لأن $yV \cap Q = \phi$

أي أنه أوجدنا جوار مفتوحة yV للنقطة y وجوار مفتوحة $Q = G - \overline{yV}$ للنقطة x بحيث يكونا منفصلين أي أن G هو T_2 - فضاء

$3 \Leftarrow 4$ لتكن $x \in \cap u \Rightarrow x \in u$ وذلك من أجل أي $u \in \{u\}$ ولنفرض جدلاً أن $x \neq e$ عندئذ حسب الفرض (3) توجد جوار مفتوحة ~~...~~ P للعنصر e بحيث يكون $x \notin P$ وبما أن $\{u\}$ مجموعة أساسية لجوارات العنصر e إذن توجد $u \in \{u\}$ بحيث يكون $u \subseteq P$ ، $x \notin u$ وهذا تناقض مع الفرض، وبذلك فالفرض الجدلي خاطئ أي أن $x = e$ ومنه $\cap u = \{e\}$

$4 \Rightarrow 1$

ليكن $x \neq y \Rightarrow xy^{-1} \neq e$ بالاستناد على الفرض (4) يوجد على الأقل $u \in \{u\}$ بحيث يكون $xy^{-1} \notin u$ ، إن uy جوار للنقطة y بحيث يكون $x \notin uy$ أي أنه أوجدنا جوار uy للنقطة y لا تحوي النقطة x أي أن G هو T_1 - فضاء.

الزمر الجزئية :

لتكن G زمرة طبولوجية و H زمرة جزئية جبرية من G . لنزود H بالطبولوجيا النسبية الناتجة عن كون H مجموعة جزئية من G . عندئذ التطبيق $g : G \times G \to G$ مستمر على $G \times G$ فإن مقصوره على $H \times H$ يكون أيضاً مستمراً كذلك أيضاً فإن المزودة بالطبولوجيا النسبية تكون زمرة طبولوجية وتدعى H عندئذ زمرة طبولوجية جزئية أو اختصاراً زمرة جزئية من G وواضح أنه إذا كانت G زمرة طبولوجية هاوسدورفية فإن H تكون أيضاً

عندئذ التطبيق g مستمر في أي زمرة طبولوجية (حسب المبرهنة 2) الطبولوجيا

f مستمر $\Leftarrow$ $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ ،

$\bar{A}\bar{B}^{-1} \subseteq \overline{AB^{-1}}$ $\Leftarrow$ $g_3(\overline{A\times B}) = g_3(\bar{A}\times\bar{B}) \subseteq \overline{g_3(A\times B)}$

لتكن $f: G \longrightarrow G$ مستمر $\Leftarrow$ $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ $\Leftarrow$ $\boxed{a\bar{A}a^{-1} \subseteq \overline{aAa^{-1}}}$ (1)

$x \longrightarrow a x a^{-1}$

والدالة $f_1: G \longrightarrow G$ الدالة مستمر (عكس الدالة f) f_1 مستمر $\Leftarrow$

$a x a^{-1} \longrightarrow x$

$\overline{f_1^{-1}(A)} \subseteq f_1^{-1}(\bar{A})$

$\Leftarrow$ $\overline{f_1^{-1}(A)} \subseteq f_1^{-1}(\bar{A})$ $\Leftarrow$ $\boxed{\overline{aAa^{-1}} \subseteq a\bar{A}a^{-1}}$ (2)

ومن الاحتواءين ينتج $\overline{aAa^{-1}} = a\bar{A}a^{-1}$

تعريف :

نقول عن الزمرة الجزئية H من G أنها ثابتة إذا كان $a^{-1}Ha = H$ من أجل أي $a \in G$

ملاحظة :

$\overline{H^{-1}} = \bar{H}^{-1}$ وذلك لأن $\forall x \in \overline{H^{-1}} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap H^{-1} \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow \forall U^{-1} \in \mathcal{U}(x^{-1}) ; U^{-1} \cap H \neq \emptyset \Leftrightarrow x^{-1} \in \bar{H}$

$\Leftrightarrow x \in \bar{H}^{-1}$